Differentialgleichungen

I. Die Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums

Beim Zerfall radioaktiver Elemente ergeben Messungen, dass der momentane Bestand f(t) an noch nicht zerfallenen Kernen dieses Elements proportional ist zur Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenen Kerne f´(t).

Also gilt mit der Konstanten $k<0$ $$f'(t) = k * f(t)$$

Lösungen: $$g(x) = c * e^{kx}$$

Übungsaufgaben

Beispiel 1:

a) Wie lauten die Lösungen der Differentialgleichung?

b) Für welche dieser Lösungen gilt f(0) = 4 ?

Beispiel 2:

Heißer Kaffee in einer Tasse kühlt sich allmählich auf Raumtemperatur ab. Die Funktion u gibt dabei zu jedem Zeitpunkt t den Unterschied zwischen Kaffe- und Raum- temperatur an. Somit ist nach dem newtonschen Abkühlungsgesetz die Abkühlungsgeschwindigkeit u´(t) proportional zum momentanen Temperaturunterschied.

a) Geben Sie die Form der Differentialgleichung und die Funktion u an, die diesen Abkühlungsvorgang beschreibt.

b) Bei einer konstanten Raumtemperatur von 20°c wurde beim Einschenken eine Kaffeetemperatur von 70°c gemessen. 10 Minuten später betrug die Temperatur noch 58°c. Bestimmen Sie hiermit die fehlenden Parameter in der Gleichung der Funktion u.

II. Differentialgleichung des beschränktes Wachstum

Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit f´(t) ist proportional zur Differenz S – f(t).

Es gilt mit k > 0: $$f'(t) = k * (S - f(t))$$

Lösungen: $$f(t) = S - c * e^{-kt}$$

Übungsaufgaben

Beispiel 1:

Ein Land, das 1990 noch 50 Millionen Einwohner hatte, würde infolge geringer Geburtenzahl einen Bevölkerungsschwund von jährlich 0,6% verzeichnen, wenn es nicht jährlich 96000 Einwanderer aufnehmen würde.
Stellen sie eine Differentialgleichung auf, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt.
Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2010?